גדילה ודעיכה

מצגת הסבר – מההתחלה ועד שאלת בגרות מלאה

מתמטיקה 3 יח״ל | שאלון 35371 | כיתה י״א | לפי הנוסחאון

האתר נבנה ע״י עדי והבינה

מה נלמד?

בבחינה יש כמעט תמיד שאלה על כמות ש**גדלה** או **קטנה** באחוז קבוע: חיסכון, מחיר דירה, מספר תושבים, תרופה בגוף.

1. לזהות: גדילה או דעיכה, ומהו q
2. לחשב כמות אחרי t יחידות זמן
3. למצוא את **אחוז** השינוי מתוך שני ערכים
4. למצוא **מתי** מגיעים לכמות מסוימת – בניסוי וטעייה
5. לזהות את הגרף המתאים

הנוסחה של כל הנושא

$$A_t = A_0 \cdot q^t$$

כמעט כל סעיף הוא הצבה בנוסחה הזאת.

מה זה „גדילה באחוז קבוע"?

בכל יחידת זמן הכמות **מוכפלת** באותו מספר q – לא מוסיפים כל פעם אותו סכום.

דוגמה: 1,000 שקלים גדלים ב־10% בכל שנה ← $q = 1.1$

שנה	0	1	2	3
סכום	1,000	1,100	1,210	1,331

כל שנה: $\cdot 1.1$. התוספת גדלה: 100, אחר כך 110, אחר כך 121.

גדילה ↗

$q > 1$ – הכמות גדלה (תושבים, חיסכון).

דעיכה ↘

$0 < q < 1$ – הכמות קטנה (מחיר מכונית, תרופה בגוף).

A_0 היא הכמות **בהתחלה** ($t = 0$).

מה יש בנוסחאון?

📘 מהנוסחאון – גדילה ודעיכה

$$A_t = A_0 \cdot q^t$$

q – מקדם הגדילה / הדעיכה ליחידת זמן, t – פרק הזמן

$$q = \frac{100 \pm p}{100}$$

p – אחוז הגדילה / הדעיכה ביחידת זמן (+ גדילה, – דעיכה)

📘 מהנוסחאון – חזקות

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

כאשר n הוא מספר טבעי ו־$a \neq 0$

מאחוז ל־q ומ־q לאחוז

מאחוז ל־q

בשאלה	q
גדל ב־4% בשנה	$\frac{100+4}{100}=1.04$
קטן ב־2% בשנה	$\frac{100-2}{100}=0.98$
קטן ב־8% בשנה	$\frac{100-8}{100}=0.92$

מ־q לאחוז

q	פירוש
1.05	גדילה של 5%
0.85	דעיכה של 15%
1.2	גדילה של 20%

„פי" ≠ „אחוז": „גדל פי 1.07" פירושו $q=1.07$, כלומר גדילה של 7%.

השיטה: כמות אחרי t יחידות זמן

1. מוצאים את A_0 – הכמות בזמן ההתחלה.
2. גדילה או דעיכה? מחשבים $q = \frac{100 \pm p}{100}$.
3. סופרים את t: כמה יחידות זמן עברו מההתחלה. מתחילת 2020 עד תחילת 2026 עברו 6 שנים, כלומר $t = 6$.
4. מציבים ב־$A_t = A_0 \cdot q^t$ ומחשבים במחשבון.
5. כותבים תשובה עם יחידות (שקלים, תושבים…).

דוגמה

28,500 שקלים, גדילה של 4% בשנה. כמה כעבור 6 שנים?

$$q = 1.04,\ t = 6$$

$$A_6 = 28{,}500 \cdot 1.04^6$$

$$\approx 36{,}061.59$$

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 5

מתי? – מציאת t בניסוי וטעייה

כשהשאלה היא „**באיזו שנה**…", הנעלם הוא t. מציבים כמה ערכים של t ורושמים כל חישוב בטבלה.

דוגמה: מתי $28{,}500 \cdot 1.04^t$ שווה 33,341?

t	הצבה	A_t
2	$28{,}500 \cdot 1.04^2$	30,825.60
3	$28{,}500 \cdot 1.04^3$	32,058.62
4	$28{,}500 \cdot 1.04^4$	**33,340.97**

$t = 4$ ← בתחילת שנת 2024

למה טבלה?

לפי תוכנית הלימודים את t מוצאים **בניסוי וטעייה, עם פירוט החישוב**. תשובה בלי ההצבות עלולה להיחשב ניחוש.

טיפ: אם עברתם את הערך – חזרו ל־t הקודם.
„לראשונה מתחת ל…" – ה־t הראשון שבו הכמות כבר קטנה יותר.

מציאת q (ואחוז השינוי) משני ערכים

ידועים הכמות בהתחלה והכמות אחרי t יחידות זמן. הנעלם הוא q:

1. כותבים משוואה: $A_0 \cdot q^t = A_t$
2. מחלקים ב־A_0: $q^t = \frac{A_t}{A_0}$
3. מוציאים שורש: $t=2$ שורש ריבועי, $t=3$ שורש שלישי
4. מ־q מוצאים את p

דוגמה

כמות הנפט: 320 בשנת 2010, 370.44 בשנת 2013.

$$320 \cdot q^3 = 370.44$$

$$q^3 = 1.157625$$

$$q = \sqrt[3]{1.157625} = 1.05$$

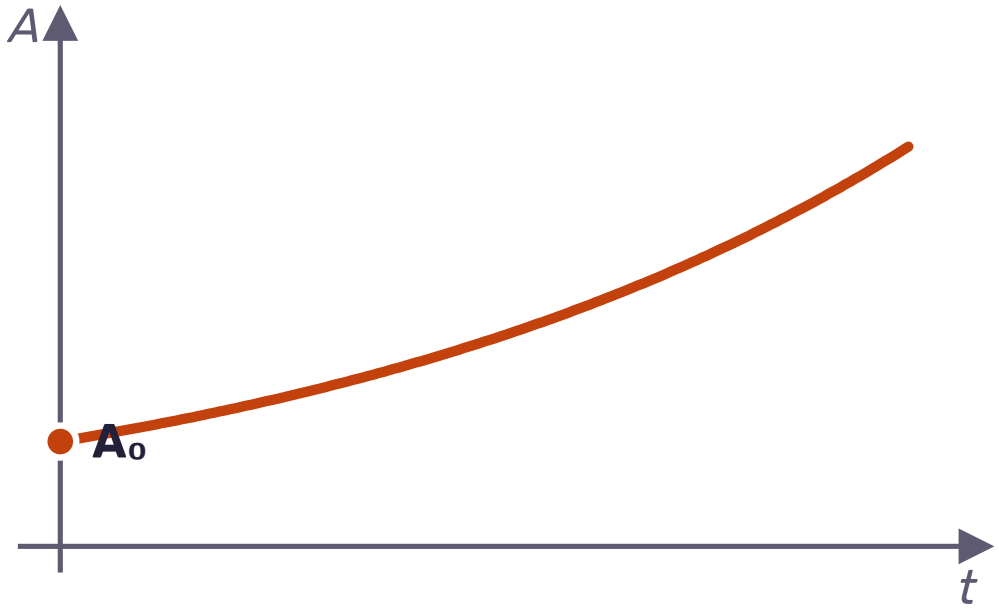
$$\frac{100+p}{100} = 1.05 \Rightarrow p = 5$$

גדילה של 5% בשנה

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד ב' • שאלה 1

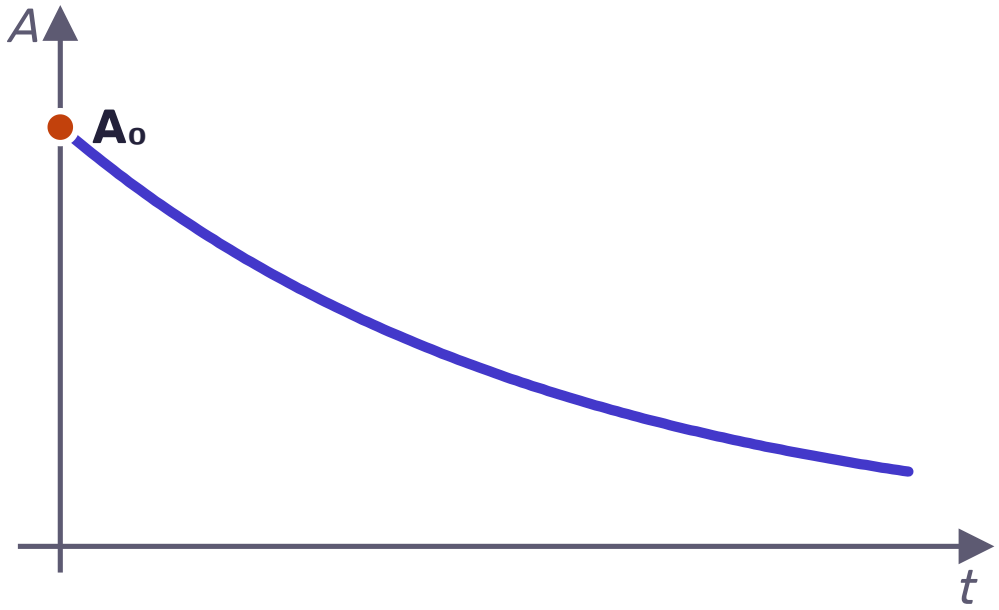
איך נראה הגרף?

גדילה: $q > 1$



עולה, וכל שנה עולה **יותר**.

דעיכה: $0 < q < 1$



יורדת, אבל לא מגיעה ל־0.

הגרף חותך את הציר האנכי ב־A_0. בשאלת „איזה גרף מתאים?" בודקים: עולה או יורדת, ומה הערך ההתחלתי.

שאלת בגרות פתורה (א, ב)

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 5

בתחילת שנת 2020 הופקדו 28,500 שקלים בתוכנית חיסכון. הסכום בתוכנית גדל ב־4% בכל שנה.

א כמה כסף היה בתוכנית בתחילת שנת 2026?

$A_0 = 28{,}500,\quad q = \frac{100+4}{100} = 1.04,\quad t = 6$

$$A_6 = 28{,}500 \cdot 1.04^6 \approx 36{,}061.59$$

כ־36,061.59 שקלים

ב באיזו שנה היו בתוכנית 33,341 שקלים?

$$28{,}500 \cdot 1.04^t = 33{,}341$$

t	A_t
2	30,825.60
3	32,058.62
4	**33,340.97**

4 שנים אחרי 2020 ← בתחילת 2024

שאלת בגרות פתורה (ג, ד)

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 5

מחיר מכונית קטן באחוז קבוע בכל שנה. בתחילת 2023 היא עלתה 40,000 שקלים, ובתחילת 2025 – 38,416 שקלים.

ג בכמה אחוזים קטן המחיר בכל שנה?

מ־2023 עד 2025 עברו שנתיים:

$$40{,}000 \cdot q^2 = 38{,}416$$

$$q^2 = 0.9604 \;\Rightarrow\; q = 0.98$$

$$\frac{100 - p}{100} = 0.98 \;\Rightarrow\; p = 2$$

ב־2% בכל שנה

ד האם בתחילת 2026 היה בתוכנית החיסכון מספיק כסף כדי לקנות את המכונית?

מחיר המכונית שנה אחרי 2025:

$$38{,}416 \cdot 0.98 = 37{,}647.68$$

בתוכנית (סעיף א): כ־36,061.59 שקלים.

$$36{,}061.59 < 37{,}647.68$$

לא – חסרים כ־1,586 שקלים

עוד שאלת בגרות: מציאת אחוז והמשך

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד ב' • שאלה 1

כמות הנפט שהופקה במדינה (במיליוני טונות) גדלה באחוז קבוע בכל שנה: בשנת 2010 – 320, ובשנת 2013 – 370.44.

ב בכמה אחוזים גדלה הכמות בכל שנה?

$$320 \cdot q^3 = 370.44 \;\Rightarrow\; q^3 = 1.157625$$

$$q = \sqrt[3]{1.157625} = 1.05$$

ב־5% בכל שנה

ג מה הכמות בשנת 2014?

$$A_4 = 320 \cdot 1.05^4 = 388.962$$

ד במדינה שכנה הופקו בשנת 2014 גם 388.962, והכמות קטנה ב־8% בכל שנה. כמה הופקו שם בשנת 2017?

$$q = \frac{100-8}{100} = 0.92, \quad t = 3$$

$$A_3 = 388.962 \cdot 0.92^3 \approx 302.88$$

בערך 302.88 מיליוני טונות

שימו לב – הטעויות הנפוצות

1. דעיכה של 8% ← $q = 0.92$, **לא** 0.08.
2. t = מספר יחידות הזמן **מההתחלה**: מ־2023 עד 2025 ← $t = 2$.
3. יחידות הזמן: אם האחוז הוא לחודש, t נספר בחודשים.
4. את t מוצאים בטבלת ניסוי וטעייה – עם כל ההצבות.
5. כשמוצאים q משני ערכים – מחלקים קודם ב־A_0 ורק אחר כך מוציאים שורש.
6. מעגלים רק בסוף. q מעוגל משנה את התוצאה.

בדיקה עצמית

מחיר מכונה היה 5,000 שקלים, והוא קטן ב־20% בכל שנה.

1. מהו q?
2. מה יהיה המחיר כעבור 3 שנים?
3. כעבור כמה שנים יהיה המחיר לראשונה פחות מ־2,000 שקלים?

מספר המנויים במועדון גדל באחוז קבוע בכל שנה: מ־2,000 ל־2,420 בתוך שנתיים.

4. בכמה אחוזים גדל מספר המנויים בכל שנה?

התשובות (לפתוח אחרי שפתרתם)

1. $q = \frac{100-20}{100} = \mathbf{0.8}$
2. $5{,}000 \cdot 0.8^3 = \mathbf{2{,}560}$ **שקלים**
3. $5{,}000 \cdot 0.8^4 = 2{,}048$
   $5{,}000 \cdot 0.8^5 = 1{,}638.4$
   כעבור 5 שנים
4. $q^2 = \frac{2420}{2000} = 1.21 \Rightarrow q = 1.1$
   גדילה של **10%** בשנה